ЛЕКЦИЯ № 8

Рассеяние частиц в лабораторной системе отсчета.

В гостях хорошо, а дома – лучше.

Пословица

До сих пор мы рассматривали динамику двух тел в системе отсчета, связанной с центром инерции системы, как движение частицы с приведенной массой в поле неподвижного центра. Реально эксперименты по рассеянию частиц проводятся в лабораторной системе отсчета, и требуется пересчет результатов, полученных в системе центра инерции в эту систему. В принципе, это можно сделать, исходя из известных выражений для траектории в системе центра инерции. Но их можно получить только при известном виде потенциала взаимодействия. Однако, как было показано выше, в теории рассеяния не требуется знания конкретной траектории движения частиц при всех временах, а требуется знание только асимптотик движения при $t \to -\infty$ и $t \to \infty$. Эту задачу можно решить в общем виде, использую законы сохранения интегралов движения.

Постановка задачи заключается в следующем: две частицы с массами m_1 и m_2 имею при $t \to -\infty$ скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Поскольку координаты частиц не конкретизируются, то это – задача с неполной информацией. (Раньше мы видели, что частоты с одинаковыми скоростями V_∞, но разными прицельными расстояниями, т.е. координатами, рассеиваются на разные углы). Что можно сказать о скоростях частиц $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$ после их взаимодействия при $t \to +\infty$? Этот процесс изображен на Рис.23.

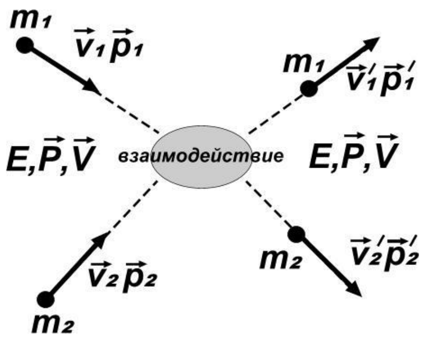


Рис.23

До столкновения частицы со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ и импульсами $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ и $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$ имели полную энергию $E = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2$ и полный импульс

$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. Центр инерции двигался со скоростью $\vec{V} = \vec{P}/(m_1 + m_2)$. После взаимодействия скорости и импульсы частиц принимают значения $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$, $\vec{p}_1' = m_1\vec{v}_1'$ и $\vec{p}_2' = m_2\vec{v}_2'$, энергия $E' = m_1 v_1'^2/2 + m_2 v_2'^2/2 = E$ и импульс $\vec{P}' = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = \vec{P}$ сохраняются. Переход до взаимодействия в систему, связанную с центром инерции (СЦИ), и обратный переход в лабораторную систему (ЛС) после взаимодействия изображены на Рис.24. Опишем их.

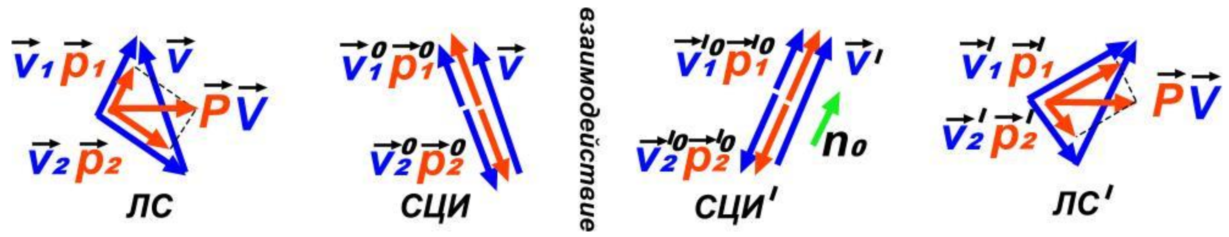


Рис.24

До взаимодействия ($t \to -\infty$) при переходе в СЦИ $\vec{v}_1^0 = \vec{v}_1 - \vec{V}$ и $\vec{v}_2^0 = \vec{v}_2 - \vec{V}$, а относительная скорость не меняется $\vec{v}^0 = \vec{v}$. В СЦИ скорости частиц выражаются через относительную скорость согласно формулам (см. Лекцию №)

$$\vec{v}_1^0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}^0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}, \quad \vec{v}_2^0 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}. \tag{8.1}$$

Т.е. скорости антиколлинеарны и параллельны $\vec{v}$. Из (8.1) следует, что

$$\vec{p}_1^0 = -\vec{p}_2^0 = m\vec{v}, \tag{8.2}$$

где $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ – приведенная масса. Энергия в СЦИ $E^0 = m_1 v_1^{02}/2 + m_2 v_2^{02}/2 = mv^2/2$ при взаимодействии сохраняется. Следовательно, после взаимодействия относительная скорость сохраняет свою величину v, но меняет направление и направлена при $t \to \infty$ вдоль некого единичного вектора $\vec{n}_0$: $\vec{v}' = v\vec{n}_0$. Направление $\vec{n}_0$ в сформулированной постановке задачи не фиксировано (задача с неполной информацией) и определяется начальными координатами частиц до рассеяния. Скорости частиц после взаимодействия в СЦИ определяются формулами

$$\vec{v}_1'^0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v\vec{n}_0, \quad \vec{v}_2'^0 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v\vec{n}_0. \tag{8.3}$$

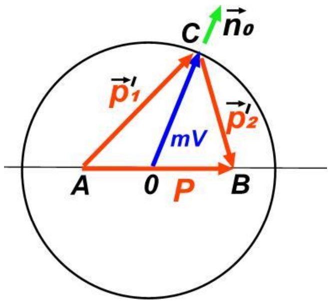
Окончательное возвращение в ЛС проводится добавлением к этим скоростям скорости центра инерции $\vec{V}$.Учитывая ее величину, находим окончательную связь скоростей частиц до и после взаимодействия:

$$\vec{v}_1' = \frac{m_2}{m_1+m_2}|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\vec{n}_0 + \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}, \quad \vec{v}_2' = -\frac{m_1}{m_1+m_2}|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\vec{n}_0 + \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}. \tag{8.4}$$

Поскольку в задаче рассеяния нас интересуют углы рассеяния, то удобно переписать соотношения (8.4) в виде

$$\vec{p}_1' = mv\vec{n}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right), \qquad \vec{p}_2' = -mv\vec{n}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right), \tag{8.5}$$

и изобразить следующую наглядную диаграмму для импульсов после рассеяния в ЛС (Рис.25). На этом графике отрезки AO и OB равны, соответственно, $A\vec{O} = m_1\vec{P}/(m_1+m_2)$ и $\vec{O}B = m_2\vec{P}/(m_1+m_2)$, и в сумме $A\vec{B} = \vec{P}$.



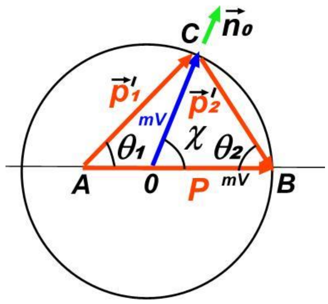


Рис.25 Рис.26

Чтобы продвинуться дальше в задаче рассеяния, рассмотрим частный случай, когда при $t \to -\infty$ частица с массой m_2 покоилась. При этом Рис.24 преобразуется в Рис.27,

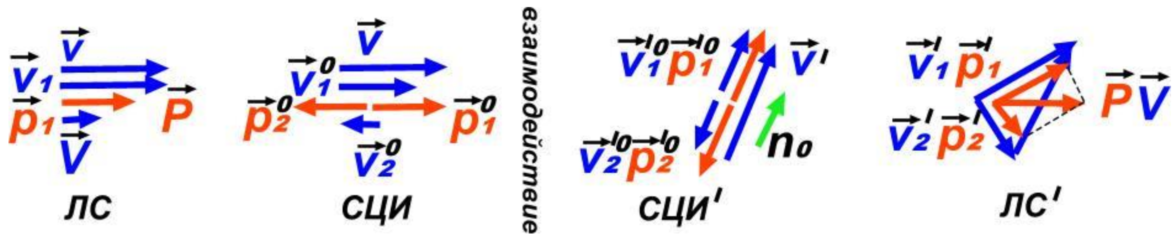


Рис.27

и во всех формулах надо положить $\vec{v}_2 = 0$, $\vec{p}_2 = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_1$, $\vec{V} = m_1\vec{v}_1/(m_1+m_2)$, $\vec{P} = \vec{p}_1$, $OB = OC = mv$, $AO = mv(m_1/m_2)$. Рис.25 модифицируется и приобретает вид, изображенный на Рис.26. Из рисунка видно, что поскольку $\vec{P} \parallel \vec{p}_1^{\,0}$ и $\vec{n}_0 \parallel \vec{p}_1'^{\,0}$ (см. Рис.27), то угол χ есть угол рассеяния в СЦИ, который обсуждался в предыдущих лекциях. С другой стороны, поскольку $\vec{P} \parallel \vec{p}_1$ (см. Рис.27), то углы ϑ_1 и ϑ_2 соответствуют углу рассеяния налетающей частицы и углу отдачи покоящейся частицы в ЛС, т.е. углы, измеряемые в эксперименте. Поскольку треугольник *OBC* равнобедренный, то $\chi/2+\vartheta_2=\pi/2$ или

$$\vartheta_2(\chi)=\frac{\pi-\chi}{2}. \tag{8.6}$$

Из Рис.26 видно, что $(AO+OC\cdot\cos\chi)tg\vartheta_1=OC\cdot\sin\chi$, откуда для угла рассеяния в ЛС получаем

$$tg\,\vartheta_1(\chi)=\frac{m_2\sin\chi}{m_1+m_2\cos\chi}. \tag{8.7}$$

В двух предельных случаях эти соотношения упрощаются.

При массе налетающей частицы, много меньшей массы мишени $m_1<<m_2$ имеем $\vartheta_2\approx\chi$, и все результаты, полученные для налетающей частицы в СЦИ переносятся в ЛС. Но формула (8.6) при этом дает угол отдачи тяжелой мишени. Этот предел соответствует Рис.28.

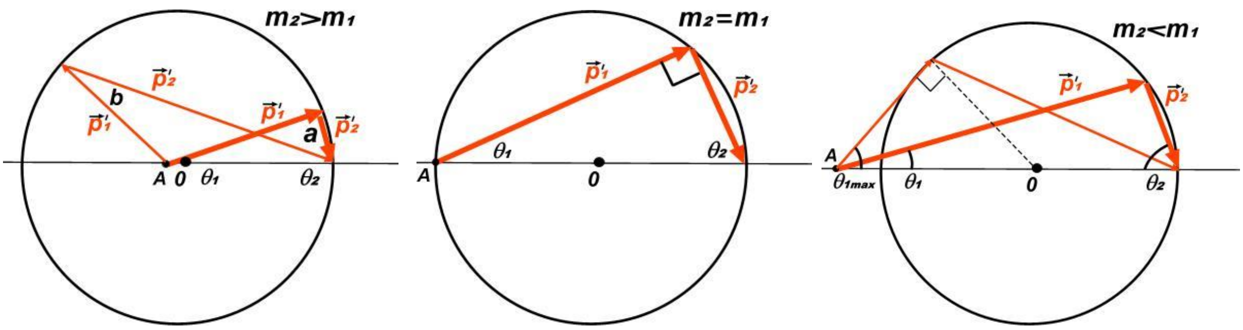


Рис.28 Рис.29 Рис.30

Из Рис.28 видно, что при $m_2>m_1$ возможно как рассеяние налетающей частицы как «вперед» (a), так и «назад» (b). Но вначале покоящаяся частица, естественно, отталкивается вперед. При малоугловом рассеянии, когда $\vartheta_1\to 0$, вторая частица испытывает отдачу под почти прямым углом. На Рис.29 приведена картина рассеяния двух частиц с одинаковыми массами $m_1=m_2$. В этом случае соотношение (8.7) упрощается и сводится к такому

$$\vartheta_1=\frac{\chi}{2}. \tag{8.8}$$

Из Рис.29 видно, что в этом случае после взаимодействия частицы разлетаются под прямым углом. (В частности, при соударении биллиардные шары всегда разлетаются под прямым углом). Наконец, при $m_1>m_2$ (Рис.30) после столкновения налетающая частица всегда рассеивается по направлению движения. При этом существует максимальный угол рассеивания $\vartheta_{1\max}$ такой, что $\sin\vartheta_{1\max} = m_2 / m_1$.

Соотношения (8.6-8.8), представленные в виде $\chi = \chi(\vartheta_1)$ и $\chi = \chi(\vartheta_2)$, позволяют найти дифференциальные сечения рассеяния для падающих и рассеивающих частиц по формуле $d\sigma = F(\chi)d\chi$ в СЦИ: $d\sigma_i = F(\chi(\vartheta_i))(d\chi / d\vartheta_i)d\vartheta_i$. В частности, для кулоновского потенциала из формулы Резерфорда для дифференциального сечения рассеяния в СЦИ (7.7)

$$d\sigma = \pi\left(\frac{\alpha}{mV_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos(\chi/2)}{\sin^3(\chi/2)}d\chi \tag{8.9}$$

имеем $$d\sigma_2 = 2\pi\left(\frac{\alpha}{mV_\infty^2}\right)^2 \frac{\sin\vartheta_2}{\cos^3\vartheta_2}d\vartheta_2, \quad d\sigma_1 \approx \pi\left(\frac{\alpha}{mV_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos(\vartheta_1/2)}{\sin^3(\vartheta_1/2)}d\vartheta_1. \tag{8.10}$$

Графики этих зависимостей для $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ приведены на Рис.31 в виде кривых 1 и 2, соответственно.

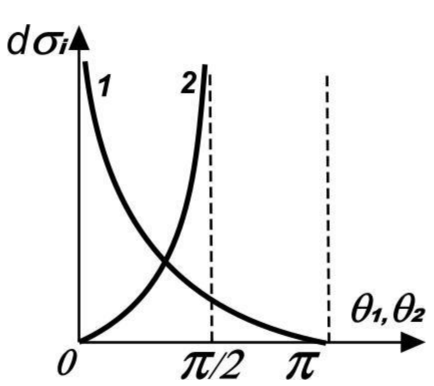


Рис.31

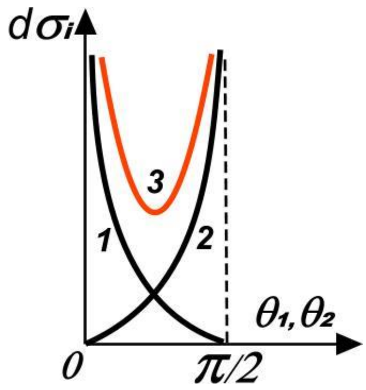


Рис.32

Во втором интересном случае равных масс $m_1 = m_2 = m_0$ формулы для сечений рассеяния имеют вид

$$d\sigma_2 = 8\pi\left(\frac{\alpha}{m_0V_\infty^2}\right)^2 \frac{\sin\vartheta_2}{\cos^3\vartheta_2}d\vartheta_2, \quad d\sigma_1 = 8\pi\left(\frac{\alpha}{m_0V_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos\vartheta_1}{\sin^3\vartheta_1}d\vartheta_1. \tag{8.11}$$

Соответствующие графики приведены на Рис.32. Точка $\pi/2$ отвечает «лобовому» столкновения, при котором налетающая частица останавливается после столкновения. Графики симметричны относительно замены $\vartheta_2 = \pi/2 - \vartheta_1$. Если покоящиеся и налетающие частицы неразличимы, то полное сечение рассеяние есть сумма двух сечений (красная линия 3 на Рис.32).